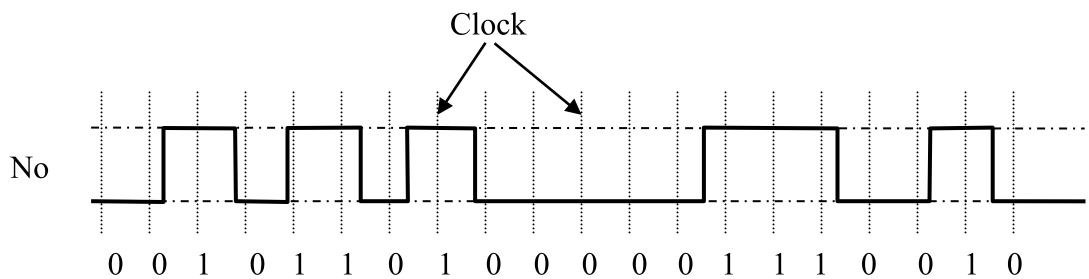
Esercizio sugli automi di Moore

1. Sintesi di un automa di Moore: Riconoscitore di stringhe binarie

Si costruisca la macchina di Moore che riconosce in ingresso le sequenze 010 e 101. La macchina riceve in ingresso 1 bit per volta. Considerare sia il caso di parole sovrapposte ssia il caso di parole non sovvrapposte.

Consideriamo il seguente esempio di segnale binario:



Uscita (Non sovv.) . . . Si . . . Si . . . . Si

Uscita (Sovv.) . . . Si Si . . Si Si . . . . Si

Il sistema deve ricordare il più lungo prefisso utile per il riconoscimento delle due parole. Consideriamo il caso di parole non sovrapposte. Gli stati possibili:

Stato	Descrizione
N	Nessun prefisso utile
0	Riconosciuto il prefisso ‘0’
1	Riconosciuto il prefisso ‘1’
01	Riconosciuto il prefisso ‘01‘
10	Riconosciuto il prefisso ‘10’
R	Riconoscuita una delle due parole

Poiché le parole non sono sovvrapposte e non devo generare un’uscita diversa per ognuna delle due parole da riconoscere, possiamo usare un solo stato per generare l’uscita nel caso di riconoscimento. In aggiunta, per come sono fatte le stringhe da riconoscere, si nota che, passato il transitorio iniziale, ogni valore in input è sempre prefisso possibile per una delle due parole. Ne segue che lo stato N, utile come stato iniziale, non sarà mai raggiunto durante il funzionamento normale.

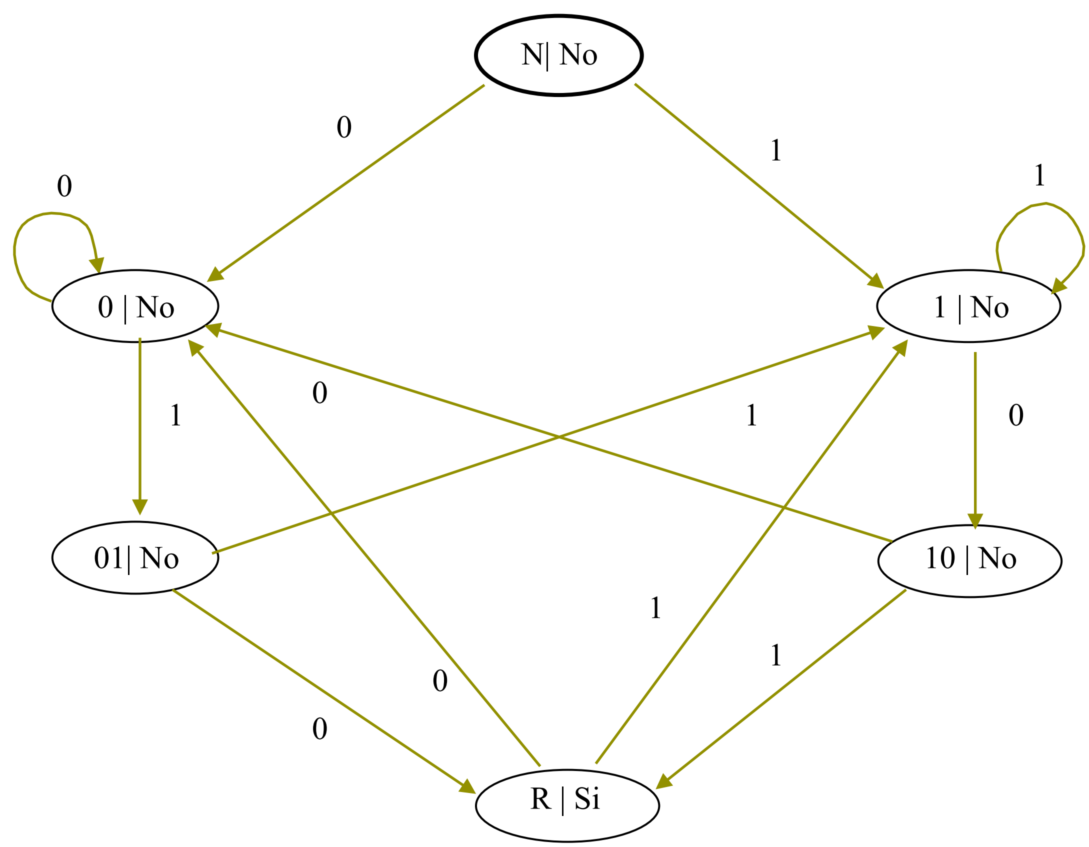
Gli ingressi sono due corrispondenti ai due livelli possibili in cui si può trovare il segnale durante il campionamento:

Ingressi	Descrizione
0	Livello logico basso
1	Livello logico alto

Il sistema quindi ha le seguenti possibili uscite:

Uscite	Descrizione
No	Parola non riconosciuta
Si	Parola riconosciuta

L' STG del sistema è il seguente:

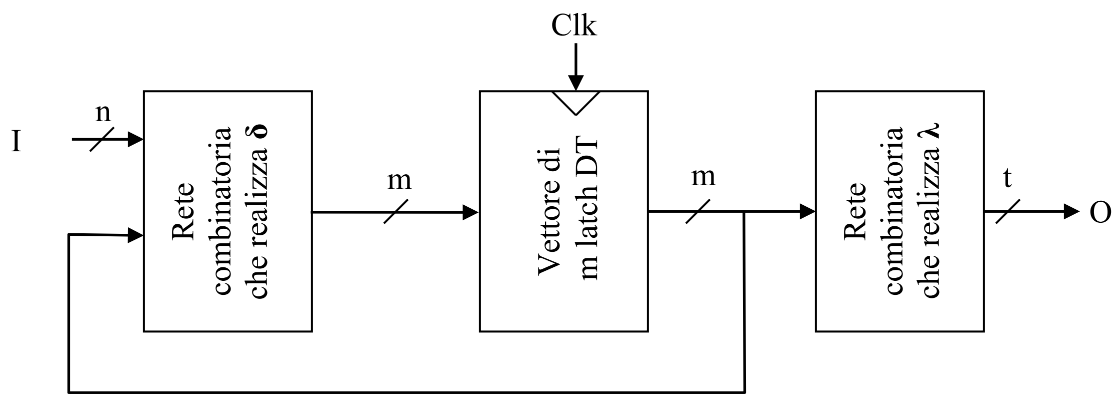


La STT corrispondente è la seguente:

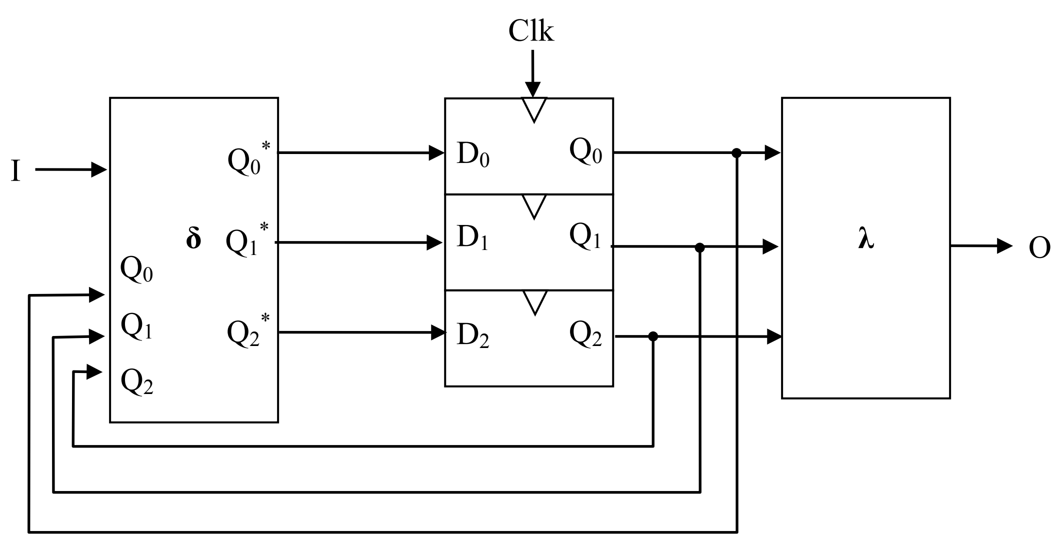
	δ		**λ**
Stato	0	1	**O**
N	0	1	No
0	0	01	No
1	10	1	No
01	R	1	No
10	0	R	No
R	0	1	Si

Per rappresentare i 6 stati possibili occorrono ceil($\log_2$ 6) = 3 bit. Analogamente per rappresentare i 2 ingressi possibili occorre 1 bit così come per le 2 uscite possibili occorre 1 bit.

Un automa di Moore è realizzabile tramite un circuito sequenziale così formato:



Il circuito che realizza il sistema dell'esempio è quindi:



Per sintetizzare le funzioni stato prossimo e di uscita occorre definire una corrispondenza tra gli stati del sistema e le configurazioni possibili dei latch, così come occorre definire una mappatura per le configurazioni in ingresso ed uscita.

Una possibile mappatura per gli stati può essere:

Stato	$\mathbf{Q_2Q_1Q_0}$
N	000
0	001
1	101
01	010
10	110
R	011

In questa mappatura $\mathbf{Q_1Q_0}$ conservano l'informazione sul numero di caratteri riconosciuti mentre $\mathbf{Q_2}$ tiene traccia di quale parola l'automa sta riconoscendo.

Una possibile mappatura per le uscite può essere:

Uscite	**O**
No	0
Si	1

Una possibile mappatura per gli ingressi può essere:

Ingressi	**I**
0	0
1	1

Ora è possibile trascrivere la STT sostituendo alle etichette la corrispondente configurazione:

		$\delta = Q^*_2Q^*_1Q^*_0$		λ
	$Q_2Q_1Q_0$	0	1	**O**
N	000	001	101	0
0	001	001	010	0
1	101	110	101	0
01	010	011	101	0
10	110	001	011	0
R	011	001	101	1

Per come sono state scelte le mappature, la funzione minima per λ risulta:

$$\mathbf{O = Q_1 Q_0}$$

Per calcolare δ è più comodo riscrivere la STT in forma tabellare:

$IQ_2Q_1Q_0$	Q^*_2	Q^*_1	Q^*_0
0000	0	0	1
0001	0	0	1
0010	0	1	1
0011	0	0	1
0100	X	X	X
0101	1	1	0
0110	0	0	1
0111	X	X	X
1000	1	0	1
1001	0	1	0
1010	1	0	1
1011	1	0	1
1100	X	X	X
1101	1	0	1
1110	0	1	1
1111	X	X	X

Sintetizzo una funzione algebrica per Q^*_2:

$IQ_2Q_1Q_0$	Q^*_2
0000	0
0001	0
0010	0
0011	0
0100	X=1
0101	1
0110	0
0111	X =0
1000	1
1001	0
1010	1
1011	1
1100	X=1
1101	1
1110	0
1111	X=0

Assegno le configurazioni indeterminate di Q^*_2 in modo da semplificare la funzione risultante. E' possibile notare che la parte alta della tabella è una AND sitetizzabile come **$\sim I\ Q_2 \sim Q_1$**. Le quattro configurazioni seguenti è una OR come **$I \sim Q_2\ (Q_1 + \sim Q_0)$.**

$$Q^*_2 = \sim I\ Q_2 \sim Q_1 + I \sim Q_2\ (Q_1 + \sim Q_0) + I\ Q_2 \sim Q_1$$

Semplificando:

$$= \sim I\ Q_2 \sim Q_1 + I\ Q_2 \sim Q_1 + I \sim Q_2\ (Q_1 + \sim Q_0)$$

$$= (\sim I + I) Q_2 \sim Q_1 + I \sim Q_2\ (Q_1 + \sim Q_0)$$

$$= Q_2 \sim Q_1 + I \sim Q_2\ (Q_1 + \sim Q_0)$$

Sintetizzo una funzione algebrica per $\mathbf{Q^*_1}$:

$IQ_2Q_1Q_0$	Q^*_1
0000	0
0001	0
0010	1
0011	0
0100	X=0
0101	1
0110	0
0111	X=0
1000	0
1001	1
1010	0
1011	0
1100	X=0
1101	0
1110	1
1111	X=0

Si può notare che la parte alta della tabella come la parte bassa sono speculari. Ne segue che è probabile che la funzione minima coinvolga delle porte XOR:

$$\mathbf{Q^*_1 = \sim I\ (Q_2\ XOR\ Q_1)\ (Q_2\ XOR\ \sim Q_0) + I\ (Q_2\ XOR\ \sim Q_1)\ (Q_2\ XOR\ Q_0)}$$

$$\mathbf{= \sim I\ (Q_2\ XOR\ Q_1) \sim (Q_2\ XOR\ Q_0) + I \sim (Q_2\ XOR\ Q_1)\ (Q_2\ XOR\ Q_0)}$$

Da notare che le XOR possono essere accorpate nel circuito allo scopo di abbassare la complessità:

$$\mathbf{= \sim I\ X_1 \sim X_2 + I \sim X_1\ X_2\ ,\ \ X_1=(Q_2\ XOR\ Q_1)\ ,\ \ X_2=(Q_2\ XOR\ Q_0)}$$

Sintetizzo una funzione algebrica per $\mathbf{Q^*_0}$:

$\mathbf{IQ_2Q_1Q_0}$	$\mathbf{Q^*_0}$
0000	1
0001	1
0010	1
0011	1
0100	X=0
0101	0
0110	1
0111	X=1
1000	1
1001	0
1010	1
1011	1
1100	X=1
1101	1
1110	1
1111	X=1

Si può notare che la parte alta della tabella, corrispondente a **I=0** coincide con $\mathbf{Q_2}+\sim\mathbf{Q_1}$. Nella parte in basso, corrispondente a **I=1**, invece si individua il max-termine, $\mathbf{Q_2+Q_1+\sim Q_0}$. Ne segue che $\mathbf{Q^*_0}$ può essere scritto come:

$$\mathbf{Q^*_0 = \sim I\ (Q_2 + \sim Q_1) + I\ (Q_2+Q_1+\sim Q_0.)}$$

Consideriamo il caso di parole sovrapposte. Gli stati possibili:

Stato	Descrizione
N	Nessun prefisso utile
0	Riconosciuto il prefisso ‘0’
1	Riconosciuto il prefisso ‘1’
01	Riconosciuto il prefisso ‘01‘
10	Riconosciuto il prefisso ‘10’
R010	Riconosciuta la parola ‘010’
R101	Riconoscuita la parola ‘101’

In questo caso le parole possono essere sovvrapposte; dobbiamo usare due stati diversi per ricordare che prefisso utile abbiamo già visto. Come per il caso precedente, per come sono fatte le stringhe da riconoscere, si nota che, passato il transitorio iniziale, ogni valore in input è sempre prefisso possibile per una delle due parole. Ne segue che lo stato N, utile come stato iniziale, non sarà mai raggiunto durante il funzionamento normale.

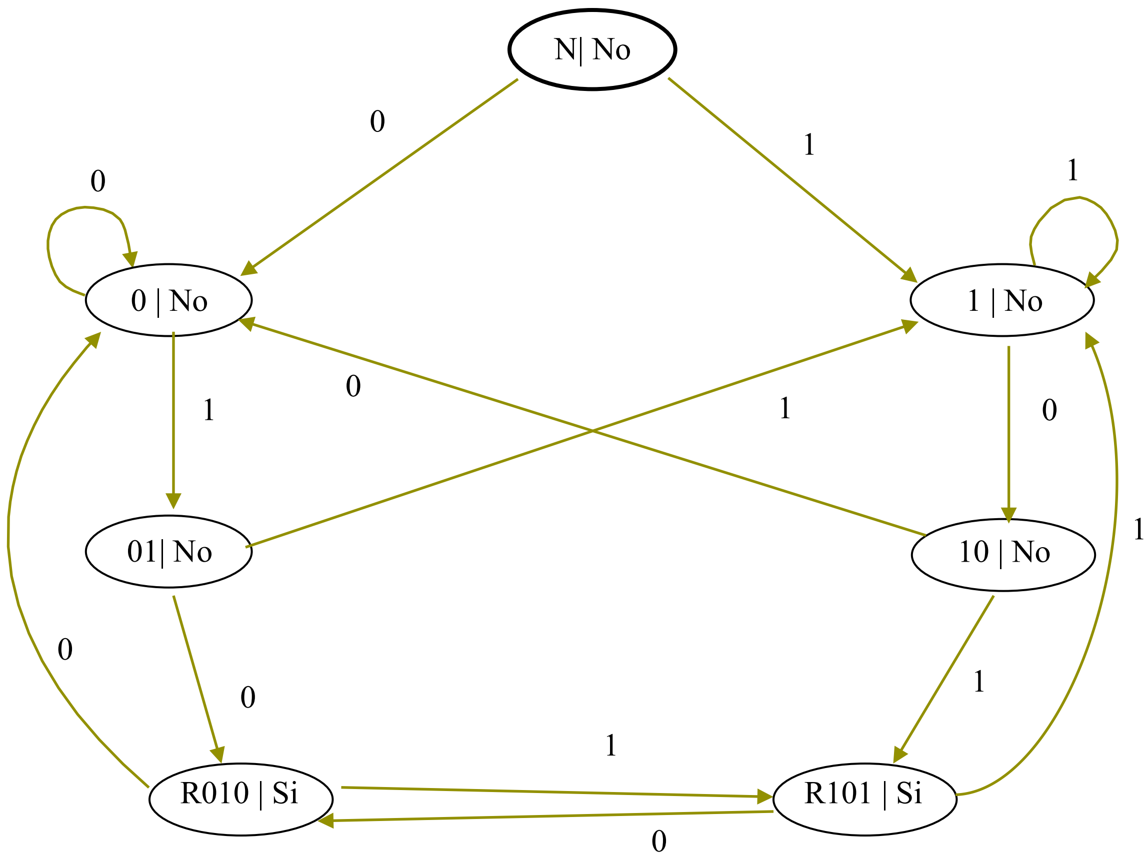
Gli ingressi sono due corrispondenti ai due livelli possibili in cui si può trovare il segnale durante il campionamento:

Ingressi	Descrizione
0	Livello logico basso
1	Livello logico alto

Il sistema quindi ha le seguenti possibili uscite:

Uscite	Descrizione
No	Parola non riconosciuta
Si	Parola riconosciuta

L' STG del sistema è il seguente:

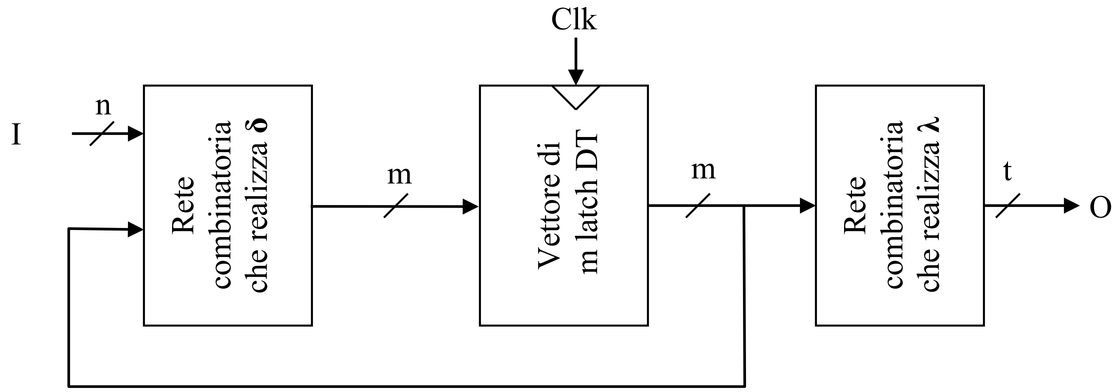


La STT corrispondente è la seguente:

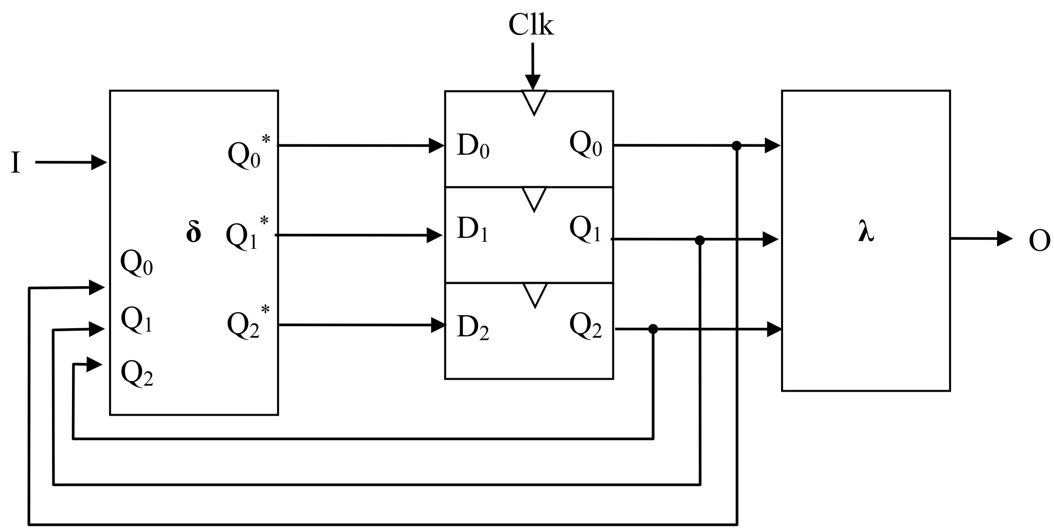
	δ		**λ**
Stato	0	1	**O**
N	0	1	No
0	0	01	No
1	10	1	No
01	R010	1	No
10	0	R101	No
R010	0	R101	Si
R101	R010	1	Si

Per rappresentare i 7 stati possibili occorrono ceil($\log_2 7$) = 3 bit. Analogamente per rappresentare i 2 ingressi possibili occorre 1 bit così come per le 2 uscite possibili occorre 1 bit.

Un automa di Moore è realizzabile tramite un circuito sequenziale così formato:



Il circuito che realizza il sistema dell'esempio è quindi:



Per sintetizzare le funzioni stato prossimo e di uscita occorre definire una corrispondenza tra gli stati del sistema e le configurazioni possibili dei latch, così come occorre definire una mappatura per le configurazioni in ingresso ed uscita.

Una possibile mappatura per gli stati può essere:

Stato	**$Q_2Q_1Q_0$**
N	000
0	001
1	101
01	010
10	110
R010	011
R101	111

In questa mappatura $\mathbf{Q_1Q_0}$ conservano l'informazione sul numero di caratteri riconosciuti mentre $\mathbf{Q_2}$ tiene traccia di quale parola l'automa sta riconoscendo.

Una possibile mappatura per le uscite può essere:

Uscite	**O**
No	0
Si	1

Una possibile mappatura per gli ingressi può essere:

Ingressi	**I**
0	0
1	1

Ora è possibile trascrivere la STT sostituendo alle etichette la corrispondente configurazione:

		$\delta = Q^*_2Q^*_1Q^*_0$		**λ**
	$Q_2Q_1Q_0$	0	1	**O**
N	000	001	101	0
0	001	001	010	0
1	101	110	101	0
01	010	011	101	0
10	110	001	111	0
R010	011	001	111	1
R101	111	011	101	1

Per come sono state scelte le mappature, la funzione minima per **λ** risulta:

$$\mathbf{O = Q_1 Q_0}$$

Per calcolare **δ** è più comodo riscrivere la STT in forma tabellare:

$IQ_2Q_1Q_0$	**Q^*_2**	**Q^*_1**	**Q^*_0**
0000	0	0	1
0001	0	0	1
0010	0	1	1
0011	0	0	1
0100	X	X	X
0101	1	1	0
0110	0	0	1
0111	0	1	1
1000	1	0	1
1001	0	1	0
1010	1	0	1
1011	1	1	1
1100	X	X	X
1101	1	0	1
1110	1	1	1
1111	1	0	1

Sintetizzo una funzione algebrica per $\mathbf{Q^*_2}$:

$\mathbf{IQ_2Q_1Q_0}$	$\mathbf{Q^*_2}$
0000	0
0001	0
0010	0
0011	0
0100	X=1
0101	1
0110	0
0111	0
1000	1
1001	0
1010	1
1011	1
1100	X=1
1101	1
1110	1
1111	1

Assegno le configurazioni indeterminate di $\mathbf{Q^*_2}$ in modo da semplificare la funzione risultante. E' possibile notare che la parte alta della tabella è una AND sitetizzabile come $\mathbf{\sim I\ Q_2{\sim}Q}$. La parte bassa invece è sintetizzabile come $\mathbf{I(Q_2+Q_1+{\sim}Q_0)}$.

$$\mathbf{Q^*_2 = {\sim}I\ Q_2{\sim}Q_1 + I\ (Q_2+Q_1+{\sim}Q_0)}$$

Semplificando:

$$\mathbf{= {\sim}IQ_2{\sim}Q_1 + IQ_2 + I(Q_1+{\sim}Q_0)}$$

$$\mathbf{= {\sim}IQ_2{\sim}Q_1 + IQ_2{\sim}Q_1 + IQ_2 + I(Q_1+{\sim}Q_0)}$$

$$\mathbf{= ({\sim}I+ I)Q_2{\sim}Q_1 + I(Q_2+Q_1+{\sim}Q_0)}$$

$$\mathbf{= Q_2{\sim}Q_1 + I(Q_2+Q_1+{\sim}Q_0)}$$

Sintetizzo una funzione algebrica per $\mathbf{Q^*_1}$:

$\mathbf{IQ_2Q_1Q_0}$	$\mathbf{Q^*_1}$
0000	0
0001	0
0010	1
0011	0
0100	X=0
0101	1
0110	0
0111	1
1000	0
1001	1
1010	0
1011	1
1100	X=0
1101	0
1110	1
1111	0

Si può notare che la parte centrale della tabella, corrispondente a (**I Xor $\mathbf{Q_2}$)=1**, segue $\mathbf{Q_0}$.

La parte esterna, corrispondente a (**I Xor $\mathbf{Q_2}$)=0**, segue $\mathbf{Q_1{\sim}Q_0}$**:**

$$\mathbf{Q^*_1 = (I\ XOR\ Q_2)\ Q_0 + {\sim}(I\ XOR\ Q_2)\ Q_1{\sim}Q_0}$$

$$\mathbf{Q^*_1 = X_1\ Q_0 + {\sim}X_1\ Q_1{\sim}Q_0\ ,\ X_1=(I\ XOR\ Q_2)}$$

Sintetizzo una funzione algebrica per Q^*_0:

$IQ_2Q_1Q_0$	Q^*_0
0000	1
0001	1
0010	1
0011	1
0100	X=0
0101	0
0110	1
0111	1
1000	1
1001	0
1010	1
1011	1
1100	X=1
1101	1
1110	1
1111	1

Assegno le configurazioni indeterminate di Q^*_0 in modo da semplificare la funzione risultante. E' possibile notare che la parte alta della tabella è una OR sitnetizzabile come

$$\sim I\ (\sim Q_2 + Q_1) = \sim I\ \sim(Q_2 \sim Q_1).$$

La parte bassa invece è sintetizzabile come $I(Q_2 + Q_1 + \sim Q_0)$.

$$Q^*_2 = \sim I\ \sim(Q_2 \sim Q_1) + I\ (Q_2 + Q_1 + \sim Q_0)$$

Da notare che molti termini sono in comune con la sintesi di Q^*_2.